

**Analiza zespolona**  
**Lista 6**

**Zad 1.** Wyznaczyć homotopię w  $\mathbb{C}$  dla następujących krzywych:

- a)  $C(0, R)$  i  $C(0, r)$ ,      b)  $C(1, 2)$  i  $C(0, 1)$ ,      c) półokręgu i jego średnicy.

**Zad 2.** Wyznaczyć homotopię w  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  dla następujących krzywych:

- a)  $C(2, 1)$  i  $C(-2, 1)$ ,  
b)  $C(2, 1)$  i  $C(-3, 2)$ .

**Zad 3.** Wyznaczyć rozwinięcie Taylora funkcji  $\frac{1}{z}$  wokół punktów  $1, i, -1$  oraz znaleźć ich promienie zbieżności.

**Zad 4.** Rozwinąć funkcję  $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$  w szereg Laurenta w pierścieniu:

- a)  $P(-1; 0, 2)$ ,      b)  $P(1; 0, 2)$ ,      c)  $P(2; 1, 3)$ ,  
d)  $P(0; 1, \infty)$ ,      e)  $P(0; 0, 1)$ .

**Zad 5.** Rozwinąć funkcję  $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z-1)(z+1)}$  w szereg Laurenta w pierścieniu  $P(1; 0, 2)$ .

**Zad 6.** Rozwinąć funkcję  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  w szereg Laurenta w obszarze  $|z| < 1$  oraz  $|z| > 1$ . Następnie uogólnić te wzory na funkcję postaci  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Zad 7.** Rozwinąć funkcję  $f(z) = \frac{1}{(2-z)(3-z)^2}$  w szereg Laurenta w obszarach  $|z| < 2$ ;  $2 < |z| < 3$  oraz  $|z| > 3$ .

**Zad 8.** Wyznaczyć residua w skończonych punktach osobliwych izolowanych następujących funkcji:

a)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ ,      b)  $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z-1)(z+1)}$ ,      c)  $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)}$ .

**Zad 9.** Dowieść, że gdy funkcja  $f$  jest holomorficzna w zerze oraz  $f(0) = 0$ , to punkt  $z = 0$  jest dla funkcji  $z^{-1}f(z)$  pozornie osobliwy.

**Zad 10.** Wykazać, że punkt  $z = 0$  jest punktem istotnie osobliwym dla funkcji  $\exp(\frac{1}{z})$  oraz  $\sin(\frac{1}{z})$ .

**Zad 11.** Określić rodzaj osobliwości w skończonych punktach osobliwych oraz w nieskończoności następujących funkcji:

(i)  $\frac{1}{z-z^3}$ ,      (ii)  $\frac{z^5}{(1-z)^2}$ ,  
(iii)  $\frac{e^z}{1+z^2}$ ,      (iv)  $\frac{1-e^z}{1+e^z}$ .